Μαθηματικά

Γ′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Δημήτριος Αργυράκης,** *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Παναγιώτης Βουργάνας**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Κωνσταντίνος Μεντής**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Σταματούλα Τσικοπούλου**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* **Μιχαήλ Χρυσοβέργης,** *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*
ΚΡΙΤΕΣ - ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	**Εμμανουήλ Μανατάκης,** *Επίκουρος καθηγητής Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών* **Μιχαήλ Σαλίχος**, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών* **Νικόλαος Παπαευστρατίου**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης*
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Νικόλαος Μαρουλάκης**, *Σκιτσογράφος - Εικονογράφος*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Ευγενία Βελάγκου**, *Φιλόλογος*
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ	**Δημήτριος Κοντογιάννης**, *Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	**Παναγιώτης Γράββαλος**, *Ζωγράφος*
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Γ΄ Κ.Π.Σ. / **ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ** / **Ενέργεια 2.2.1.** / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.,
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Αργυράκης
Παναγιώτης Βουργάνας
Κωνσταντίνος Μεντής
Σταματούλα Τσικοπούλου
Μιχαήλ Χρυσοβέργης

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Μαθηματικά

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

Πρόλογος

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου, έχει σκοπό να βοηθήσει εσένα το μαθητή της Γ′ Γυμνασίου, να κατανοήσεις και να εμπεδώσεις τις διάφορες μαθηματικές έννοιες και να αποκτήσεις τις αναγκαίες δεξιότητες που περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα της τάξης σου.
Η ύλη του βιβλίου είναι οργανωμένη σε δύο μέρη. Το Α′ Μέρος περιλαμβάνει 5 Κεφάλαια που αναφέρονται στην Άλγεβρα, ενώ το Β′ Μέρος περιλαμβάνει 2 Κεφάλαια που αναφέρονται στη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία. Κάθε Κεφάλαιο χωρίζεται σε ενότητες μαθημάτων.

Σε κάθε ενότητα περιλαμβάνονται:
1. Οι κύριοι στόχοι. Στην αρχή κάθε ενότητας αναγράφονται οι κύριοι στόχοι της, όπως διατυπώνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, ώστε να ξέρεις πού σε οδηγεί ο καθηγητής σου.

2. Η δραστηριότητα. Οι δραστηριότητες είναι μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων, όσο το δυνατόν πιο κοντά στα ενδιαφέροντά σου, που οδηγούν στην αναγκαιότητα της εισαγωγής των εννοιών που θα διδαχθείς ή στην επανάληψη και διεύρυνση άλλων που έχεις ήδη διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις. Με κατάλληλα ερωτήματα γίνεται προσπάθεια να επικεντρωθεί η προσοχή σου σε ορισμένες ενέργειες που θα σου δώσουν την ευκαιρία να αναπτύξεις πρωτοβουλία, να διατυπώσεις τις ιδέες και απόψεις σου και να τις ανταλλάξεις με τους συμμαθητές σου.

3. Το κυρίως μάθημα. Περιλαμβάνει γνώσεις που πρέπει να αποκτήσεις, να συγκρατήσεις και να μπορείς να εφαρμόζεις, όπως ορισμούς και ιδιότητες, που θα σου επιτρέψουν να επιλύεις προβλήματα και να διατυπώνεις συλλογισμούς. Σε πολλές περιπτώσεις περιλαμβάνει αποδείξεις βασικών προτάσεων.

4. Παραδείγματα - Εφαρμογές. Πρόκειται για ένα σύνολο λυμένων ασκήσεων και προβλημάτων, που σκοπεύουν να σου δώσουν τη δυνατότητα να μάθεις πώς να αντιμετωπίζεις ανάλογες ασκήσεις, να διαπιστώσεις την ευρύτητα των εφαρμογών που έχουν τα Μαθηματικά, να αποκτήσεις νέες εμπειρίες στις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων και να διευρύνεις το πεδίο των γνώσεών σου.

5. Ερωτήσεις κατανόησης. Είναι απλά ερωτήματα ή σύντομα προβλήματα τα οποία πρέπει να μπορείς να απαντήσεις, μετά την ολοκλήρωση του μαθήματος.

Πρόλογος

6. Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα. Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε για τη συλλογή και την ταξινόμηση των προτεινόμενων ασκήσεων και προβλημάτων. Από τις πιο απλές ασκήσεις ως τα πιο σύνθετα προβλήματα, έγινε προσπάθεια να αναδειχθεί η χρησιμότητά τους σε κάθε τομέα εφαρμογής τους, (Φυσική - Χημεία - Οικονομία κ.τ.λ.) που ενδείκνυται για την ηλικία και τις γνώσεις σου, αλλά και σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Σε ορισμένες ενότητες περιλαμβάνονται συμπληρωματικά:
- **Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών** και **Δραστηριότητες** που στοχεύουν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον σου ώστε να συνεισφέρουν στην κατανόηση των εννοιών και των μαθηματικών προβλημάτων στα οποία αναφέρονται.
- **Διαθεματικά σχέδια εργασίας.** Πρόκειται για δραστηριότητες οι οποίες θα αποτελέσουν θέματα για ομαδική έρευνα και συνεργασία.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν:
- **Γενικές Επαναληπτικές ασκήσεις και προβλήματα** και μια σύντομη **Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση** με τις βασικότερες γνώσεις που αποτελούν τον πυρήνα του κεφαλαίου.

Το βιβλίο κλείνει με:
Απαντήσεις - Υποδείξεις των ασκήσεων και **Ευρετήριο όρων.**

Πιστεύουμε ότι το βιβλίο αυτό ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις της σύγχρονης παιδαγωγικής και ότι οι γνώσεις που θα αποκτήσεις από αυτό θα σε βοηθήσουν στα επόμενα βήματά σου. Για να επιτευχθούν οι στόχοι του βιβλίου αυτού εκτός από τη δική σου προσπάθεια, χρειάζεται και η αρμονική συνεργασία με τον καθηγητή σου.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

Α′ ΜΕΡΟΣ • ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 1ο - ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

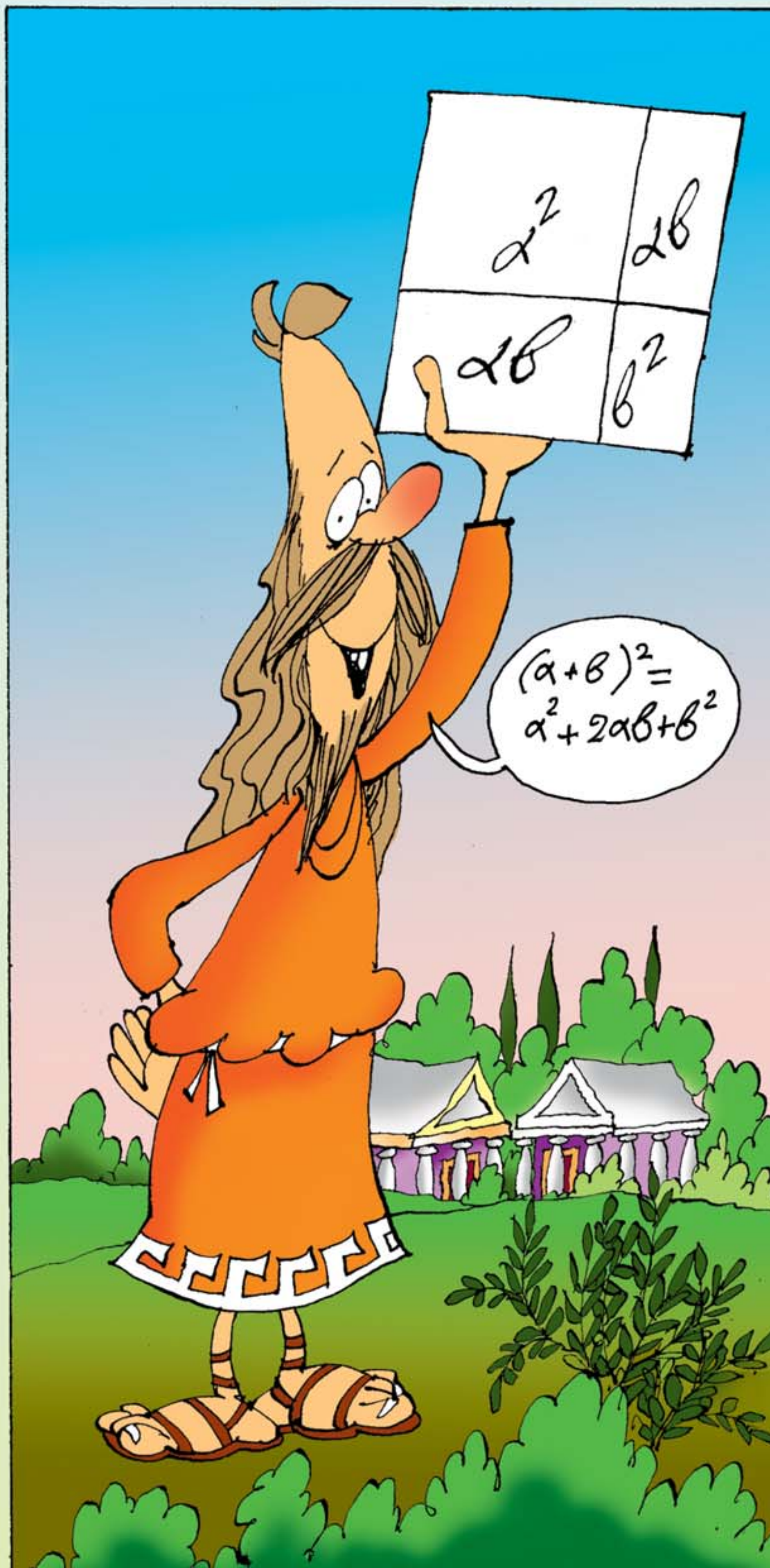
Κεφάλαιο 3ο - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Περιεχόμενα


Α΄ ΜΕΡΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ



1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)

✔ *Θυμάμαι τους πραγματικούς αριθμούς, τις τεχνικές και τις βασικές ιδιότητες των πράξεών τους.*
✔ *Εμπεδώνω τις ιδιότητες των δυνάμεων.*
✔ *Γνωρίζω τις ιδιότητες των ριζών και μαθαίνω να τις χρησιμοποιώ.*

A Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

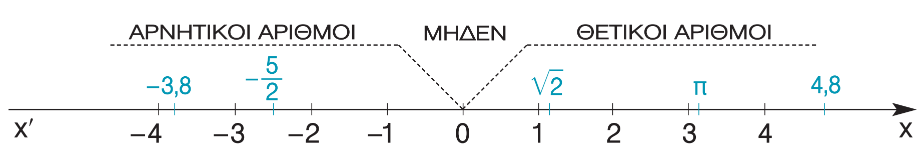
Πραγματικοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί που γνωρίσαμε στις προηγούμενες τάξεις.
Π.χ. $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{2}$, 7,34, $\sqrt{2}$, 3, π, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sqrt{4}$, –0,5, $1+\sqrt{3}$, 6,1010010001...
Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$.

$\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{2}=\frac{-5}{2}$, $7{,}34=\frac{734}{100}$,
$3=\frac{3}{1}$, $\sqrt{4}=2=\frac{2}{1}$, $-0{,}5=\frac{-5}{10}$.

Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

$\sqrt{2}$, π, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $1+\sqrt{3}$, 6,1010010001...



Κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται μ' ένα σημείο πάνω σ' έναν άξονα.

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και είναι ίση με την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή του άξονα.
Για παράδειγμα: $|-2|=2$, $|2|=2$, $|0|=0$, $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$

Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Πρόσθεση

- Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε πρόσημο, το κοινό τους πρόσημο.

$+7+5=+12$
$-7-5=-12$

- Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά τους βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$+5 - 7 = -2$
$-5 + 7 = +2$

Πολλαπλασιασμός

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε πρόσημο +

$(+5)\cdot(+7) = +35$
$(-5)\cdot(-7) = +35$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε πρόσημο –

$(+5)\cdot(-7) = -35$
$(-5)\cdot(+7) = -35$

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \quad \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι:

- $\alpha \cdot 0 = 0$.
- Αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν, λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα, λέγονται **αντίστροφοι**.

$-3\,,\ 3$

$\frac{4}{5}\,,\ \frac{5}{4}$

Αφαίρεση – Διαίρεση

Οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης γίνονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως.

- Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

$5 - 7 = 5 + (-7) = -2$
$5 - (-7) = 5 + (+7) = 12$

$$\boxed{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

- Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ($\alpha : \beta$, ή $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\beta \neq 0$), πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$-5 : 15 = -5 \cdot \frac{1}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $(-3)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ β) $\dfrac{-3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}$

Λύση

α) $(-3)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-3-\left(-\frac{1}{6}\right)=$

$=+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-3+\frac{1}{6}=\frac{27}{6}+\frac{2}{6}-\frac{18}{6}+\frac{1}{6}=\frac{12}{6}=2$

β) $\dfrac{-3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}=\dfrac{-\frac{6}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{6}{3}-\frac{1}{3}}=\dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{3}}=-\frac{15}{10}=-\frac{3}{2}$

2 Αν $\alpha+\beta=-3$ και $\gamma+\delta=-5$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A=-(\gamma-2\alpha)+2\left(\beta-\frac{\delta}{2}\right)$.

Λύση

$A=-(\gamma-2\alpha)+2\left(\beta-\frac{\delta}{2}\right)=$

$=-\gamma+2\alpha+2\beta-\delta=$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$=2\alpha+2\beta-\gamma-\delta=$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

$=2(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)=$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$=2(-3)-(-5)=$

$=-6+5=$

$=-1$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας «x» στην κατάλληλη θέση.

	-3	$\frac{1}{2}$	6	$0,\overline{3}$	$-0,8$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	$3,14$	π	$\frac{22}{7}$
Ακέραιος										
Ρητός										
Άρρητος										

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $-3+7=$ ..... β) $-6+6=$ ..... γ) $-2-9=$ .....

δ) $(-2)\cdot\frac{1}{3}=$ ..... ε) $0\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=$ ..... στ) $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=$ .....

ζ) $(-6):\left(-\frac{12}{5}\right)=$ ..... η) $\left(-\frac{8}{5}\right):(+4)=$ ..... θ) $\left(-\frac{4}{3}\right):\left(+\frac{4}{3}\right)=$ .....

3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) (–3 · 2 – 5)x = ... β) –3(2 – 5x) = ... γ) –3(2 – 5)x = ...

δ) –2(x ··· .....) = ... + 6 ε) (3 + x)(2 + y) = ... στ) 4(... + ...) = 12x + 8

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε:

α) είναι ομόσημοι β) έχουν ίσες απόλυτες τιμές

γ) έχουν γινόμενο μηδέν δ) έχουν γινόμενο τη μονάδα. ☐

ii) Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε:

α) είναι ετερόσημοι β) έχουν άθροισμα μηδέν

γ) έχουν ίσες απόλυτες τιμές δ) έχουν γινόμενο τη μονάδα. ☐

5 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι. ☐

β) Το άθροισμα δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός. ☐

γ) Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός. ☐

δ) Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό είναι αρνητικοί. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) 2 + 3 · 4 – 12 : (–4) + 1 β) 2 + 3 · (4 – 12) : (–4 + 1)

γ) –3 · (–2) – 5 + 4 : (–2) – 6 δ) –8 : (–3 + 5) – 4 · (–2 + 6)

2 Τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων σχηματίζουν το έτος που έγινε ένα γεγονός στη χώρα μας με παγκόσμιο ενδιαφέρον.

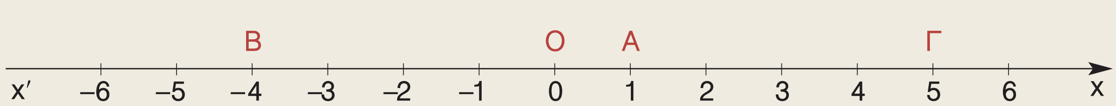
–(5 – 4) – (+2) + (–6 + 4) – (–7) = ☐

4 – (– 2 + 6 – 3) + (–9 + 6) = ☐

14 + (–6 + 5 – 3) – (– 4 – 1) · (–2) = ☐

(–3) · (–2) + 4 – (+5) – (–1) : (–1) = ☐

3 Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από τη θέση Ο, κινήθηκε πάνω στον άξονα x′x προς τα αριστερά στη θέση Β και στη συνέχεια προς τα δεξιά στη θέση Γ. Αν είναι ΟΑ = 5 km, τότε να βρείτε πόσο διάστημα διήνυσε το αυτοκίνητο και πόσο μετακινήθηκε από την αρχική του θέση.



4 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right)$ β) $-\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6}\right)$

γ) $-5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$ δ) $\left(1 - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right)$

5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}}$ β) $\dfrac{-2 \cdot 3 - \frac{1}{4}}{-2 \cdot \left(3 - \frac{1}{4}\right)}$ γ) $-7 + \dfrac{-3 - \frac{1}{3}}{-2 + \frac{1}{3}}$

6 Οι ελάχιστες θερμοκρασίες μιας πόλης το πρώτο δεκαήμερο του έτους ήταν:
1, –3, 0, 2, 1, –2, –5, 0, –3, –1.
Να βρείτε τη μέση ελάχιστη θερμοκρασία της πόλης το δεκαήμερο αυτό.

7 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (+ ή –).

α) 12 ... 5 ... 20 = –3 β) –8 ... 9 ... 1 = 0

γ) $\frac{5}{4} \ldots \frac{3}{4} \ldots \frac{10}{4} = 3$ δ) –0,35 ... 6,15 ... 8,50 = 2

8 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $8 - (α - β) + (α - 5 - β) = 3$

β) $2 - (α + β - γ) - (4 + γ - β) - (-2 - α) = 0$

γ) $-2 \cdot (α - 3) + α \cdot (-7 + 9) - 3 \cdot (+2) = 0$

9 Αν $x + y = -5$ και $ω + φ = -7$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$Α = 4 - (x - ω) - (y - φ)$ $Β = -(-5 - x + φ) + (-8 + y) - (ω - 4)$

10 Αν α, β είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου, που έχει περίμετρο 56 και γ, δ οι διαστάσεις ενός άλλου ορθογωνίου, που έχει περίμετρο 32, να υπολογίσετε την παράσταση $Α = α - (9 - 2γ) - (15 - β - 2δ)$.

11 Να τοποθετήσετε καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς
–7, –6, –5, –3, 1, 2, 4, 5, 9
σε ένα τετράγωνο, ώστε τα τρία αθροίσματα να είναι ίσα μεταξύ τους.

$\square + \square + \square = \square$

$\square + \square + \square = \square$

$\square + \square + \square = \square$

Β Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ και είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

Δηλαδή $\qquad \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ - παράγοντες}}$

Ορίζουμε ακόμη:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$
$(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu$	$(2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$	$(2^{-3})^{-2} = 2^6 = 64$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{(-2)^2 \cdot (-3)^3}{(3 \cdot 2^2)^2}$ $\qquad$ β) $x^2 \cdot (x \cdot y^2)^3 : (x^2 \cdot y^3)^2$

Λύση

α) $\dfrac{(-2)^2 \cdot (-3)^3}{(3 \cdot 2^2)^2} = \dfrac{2^2 \cdot (-3^3)}{3^2 \cdot (2^2)^2} = \dfrac{-2^2 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^4} = -\dfrac{3}{2^2} = -\dfrac{3}{4}$

β) $x^2(xy^2)^3 : (x^2y^3)^2 = \dfrac{x^2(xy^2)^3}{(x^2y^3)^2} = \dfrac{x^2x^3(y^2)^3}{(x^2)^2(y^3)^2} = \dfrac{x^5y^6}{x^4y^6} = x$

2 Αν $\quad x^3 \cdot y^2 = -3$, να υπολογιστεί η παράσταση $A = x^2 \cdot (x^2 \cdot y^3)^2 \cdot (x^{-1})^{-3}$.

Λύση

$A = x^2 \cdot (x^2 \cdot y^3)^2 \cdot (x^{-1})^{-3} = x^2 \cdot x^4 \cdot y^6 \cdot x^3 = x^2 \cdot x^4 \cdot x^3 \cdot y^6 = x^9 \cdot y^6 =$

$= (x^3 \cdot y^2)^3 = (-3)^3 = -27.$

3 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$A = (-2)^2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot (-2) : 5 - 6 \quad B = (2 \cdot 5 - 3^2) + 2 \cdot (2^3 - 4) - 12 : (-3)$

Λύση

Η προτεραιότητα των πράξεων

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

$$\begin{aligned} A &= (-2)^2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot (-2) : 5 - 6 = \\ &= 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 9 - 25 \cdot (-2) : 5 - 6 = \\ &= -12 + 18 + 50 : 5 - 6 = \\ &= -12 + 18 + 10 - 6 = \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2 \cdot 5 - 3^2) + 2 \cdot (2^3 - 4) - 12 : (-3) = \\ &= (2 \cdot 5 - 9) + 2 \cdot (8 - 4) - 12 : (-3) = \\ &= 10 - 9 + 2 \cdot 4 - 12 : (-3) = \\ &= 1 + 8 + 4 = \\ &= 9 + 4 = \\ &= 13 \end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = \alpha^4$. ☐

β) Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^4$. ☐

γ) Οι αριθμοί $(-5)^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι. ☐

δ) Οι αριθμοί $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ είναι αντίστροφοι. ☐

ε) Για κάθε αριθμό α ισχύει $(3\alpha)^2 = 9\alpha^2$. ☐

στ) Ο αριθμός $-(-5)^2$ είναι θετικός. ☐

ζ) Ο αριθμός -3^{-2} είναι θετικός. ☐

2 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (= ή ≠).

α) $(-1)^6 \ldots 1$ β) $3^{-2} \ldots 9$ γ) $-4^2 \ldots -16$ δ) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \ldots \frac{2}{5}$

ε) $5^{-2} \ldots \frac{1}{-25}$ στ) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \ldots 0$ ζ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \ldots \frac{1}{32}$ η) $(7 + 2)^2 \ldots 7^2 + 2^2$

3 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η τιμή της παράστασης $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ είναι:

α) $-\frac{4}{9}$ β) $-\frac{9}{4}$ γ) $\frac{9}{4}$ δ) $\frac{4}{9}$ ☐

ii) Η τιμή της παράστασης $[(-2)^0]^3$ είναι:
α) -2^3 β) -6 γ) 2^3 δ) 1 ☐

iii) Η τιμή της παράστασης $2^3 + 3^2$ είναι:
α) 5^5 β) 17 γ) 5^6 δ) 6^5 ☐

4 Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	1. $\frac{1}{4}$
α. $(2^4)^{-1}$	2. -2^4
β. $(2^{-5})^2 \cdot 2^{10}$	3. 4
γ. $(-2)^{-2}$	4. 2^3
δ. $(2^4 : 2^3) \cdot 2^2$	5. 2^{-4}
	6. 1

α	β	γ	δ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

α) $2^{-5} \cdot 2^8$ β) $3^4 : 3^{-2}$ γ) $2^3 \cdot 5^3$ δ) $(5^{-2})^{-4}$

ε) $3^{-2} \cdot (-3)^4$ στ) $\frac{(-6)^6}{2^6}$ ζ) $4^2 : 3^4$ η) $27 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^5}$

2 Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

α) $(2^{-2})^3 \cdot 2^8$ β) $(-3)^2 \cdot (-3)^{-4}$ γ) $(0{,}75)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ δ) $36^3 : (-12)^3$

ε) $(2{,}5)^4 \cdot (-4)^4$ στ) $4^{12} : 2^{20}$ ζ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-14}$ η) $(0{,}01)^3 \cdot 10^5$

3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(x^2)^3 \cdot 5x^4$ β) $(xy^3)^2 \cdot x^3y$ γ) $(-2x)^2 \cdot (-2x^2)$

δ) $\left(-\frac{2}{3}x\right)^3 : x^2$ ε) $(-3x^2)^3 \cdot (-2x^3)^2$ στ) $\frac{3}{-2}x^3 : \left(-\frac{3}{2}x\right)^2$

4 Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$A = 3 \cdot (-2)^2 + 4 - (-7)^0 \cdot 2 - 8 \cdot (2^{-1} - 1) - 2 \cdot 3^2$ $B = (-4)^2 : 2 - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4$

$\Gamma = (2{,}5)^2 \cdot (1{,}25)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-8)^3$ $\Delta = (25^7 \cdot 8^4) : (5^7 \cdot 40^4)$

5 Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου, πόσες φορές μεγαλώνει το εμβαδόν του;

Γ Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x. Π.χ. $\sqrt{25} = 5$, αφού $5^2 = 25$

Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0} = 0$.

Όμως και $(-5)^2 = 25$, οπότε έχουμε $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$.

Άρα, για κάθε **πραγματικό αριθμό x** ισχύει:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|} \qquad \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7, \qquad \sqrt{7^2} = 7$$

Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$, δηλαδή $(\sqrt{9})^2 = 9$. Γενικά

$$\boxed{\text{Αν } x \geq 0, \text{ τότε } (\sqrt{x})^2 = x}$$

Ιδιότητες των ριζών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (= ή ≠)

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{100}$ ... $\sqrt{4 \cdot 100}$ και $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}}$ ... $\sqrt{\dfrac{4}{100}}$

2. Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης να συμπληρώσετε και τα παρακάτω κενά:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ ... $\sqrt{2 \cdot 5}$ και $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ ... $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Για τους αριθμούς 4 και 100 μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν:

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = \sqrt{4 \cdot 100} \quad \text{και} \quad \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \sqrt{\frac{4}{100}}$$

Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης μπορούμε να καταλήξουμε σε ανάλογες ισότητες και για τους αριθμούς 2 και 5. Όσα όμως παραδείγματα κι αν εξετάσουμε, δεν αρκούν για να μας πείσουν, ότι οι σχέσεις αυτές είναι αληθείς για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς. Μόνο μια απόδειξη μπορεί να μας πείσει.

Γενικά

Για δύο μη αρνητικούς αριθμούς α, β μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

- Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους. $\quad \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
- Το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους. $\quad \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ με $\beta > 0$

Για να αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους της ξεχωριστά.

- $(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2\cdot(\sqrt{\beta})^2 = \alpha\beta$
- $(\sqrt{\alpha\beta})^2 = \alpha\beta$

Παρατηρούμε, ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha\beta}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο αβ, οπότε είναι ίσοι.

$$\text{Άρα}\quad \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και τη δεύτερη ισότητα.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$, ενώ $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
δηλαδή $\sqrt{16}+\sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$.

Γενικά:

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha+\beta}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να αποδειχθεί ότι $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ και γενικά για μη αρνητικούς αριθμούς α, β ότι ισχύει $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$.

Λύση

Επειδή $20 = 4\cdot5 = 2^2\cdot5$ έχουμε $\sqrt{20} = \sqrt{2^2\cdot5} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

Ομοίως έχουμε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$.

➤ *Ο αριθμός 20 μπορεί να αναλυθεί και με άλλον τρόπο σε γινόμενο παραγόντων π.χ. $20 = 2\cdot10$, αλλά τότε κανένας παράγοντάς του δεν είναι τετράγωνο ενός θετικού ακέραιου αριθμού.*

2 Να αποδειχθεί ότι:

α) $3\sqrt{3}+2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ β) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{24} = 6\sqrt{2}$ γ) $\sqrt{50}-\sqrt{18} = 2\sqrt{2}$

Λύση

α) Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας έχουμε:
$3\sqrt{3}+2\sqrt{3} = (3+2)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

β) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{24} = \sqrt{3\cdot24} = \sqrt{72} = \sqrt{36\cdot2} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

γ) $\sqrt{50}-\sqrt{18} = \sqrt{25\cdot2}-\sqrt{9\cdot2} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = 5\sqrt{2}-3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

3 Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{5}{\sqrt{3}}$, που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

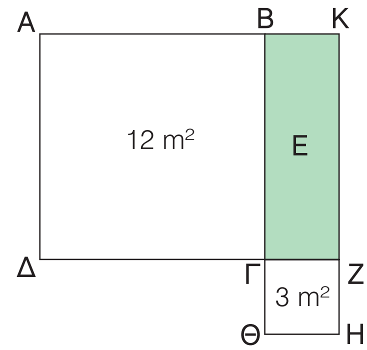
Λύση

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον παρονομαστή.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

4 Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΓΖΗΘ έχουν εμβαδόν 12 m² και 3 m² αντιστοίχως. Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΚΖΓ και το μήκος του τμήματος ΒΘ.

Λύση



Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $ΒΓ^2 = 12$ m², οπότε η πλευρά του είναι $ΒΓ = \sqrt{12}$ m.
Το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΖΗΘ είναι $ΓΖ^2 = 3$ m², οπότε η πλευρά του είναι $ΓΖ = \sqrt{3}$ m. Επομένως
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΚΖΓ είναι:
$Ε = ΒΓ \cdot ΓΖ = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$ m².
Το μήκος του τμήματος ΒΘ είναι:
$ΒΘ = ΒΓ + ΓΘ = ΒΓ + ΓΖ = \sqrt{12} + \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{3} + \sqrt{3} =$ ..... β) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$ ..... γ) $\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} =$ .....

δ) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} =$ ..... ε) $\sqrt{18} : \sqrt{2} =$ ..... στ) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$ .....

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε στοιχείο της στήλης Α ένα στοιχείο από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\sqrt{25}$	
β. $\sqrt{-25}$	1. -5
γ. $-\sqrt{25}$	
δ. $\sqrt{5^2}$	2. δεν ορίζεται
ε. $\sqrt{(-5)^2}$	3. 5
στ. $\sqrt{-5^2}$	

α	β	γ	δ	ε	στ

3 Να συμπληρώσετε τους πίνακες:

α	β	$\sqrt{α}$	$\sqrt{β}$
4	1		
9	16		
64	36		

Άθροισμα

$\sqrt{α+β}$	$\sqrt{α}+\sqrt{β}$

Γινόμενο

$\sqrt{αβ}$	$\sqrt{α} \cdot \sqrt{β}$

Πηλίκο

$\sqrt{\dfrac{α}{β}}$	$\dfrac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}}$

4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ☐

β) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ☐

γ) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ ☐

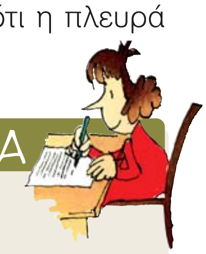
δ) $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ☐

ε) $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{1}{2} - 1$ ☐

στ) Το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι το $\sqrt{10}$. ☐

ζ) Το μισό του $\sqrt{12}$ είναι το $\sqrt{3}$. ☐

5 Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 50 m^2. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι η πλευρά του είναι $5\sqrt{2}$ m;



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ β) $5\sqrt{7} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + 4\sqrt{3}$

γ) $\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{8}} - \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{\frac{12}{7}}$ δ) $\sqrt{\frac{14}{5}} \cdot \sqrt{\frac{10}{7}} + \sqrt{\frac{21}{2}} \cdot \sqrt{\frac{14}{3}}$

2 Να αποδείξετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8} = -10\sqrt{2}$ β) $\sqrt{27} - \sqrt{20} + \sqrt{12} - \sqrt{5} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$

γ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{18} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{48} + \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}$ δ) $\sqrt{3{,}6} \cdot \sqrt{4{,}9} - \sqrt{0{,}8} \cdot \sqrt{0{,}2} = 3{,}8$

3 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{12+\sqrt{16}}$ β) $\sqrt{86+2\sqrt{52-\sqrt{9}}}$ γ) $\sqrt{6\sqrt{12\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

4 Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις περιμέτρους και τα εμβαδά των ορθογωνίων ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ και ΚΛΜΝ. Ποιο από τα ορθογώνια έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

	μήκος	πλάτος	περίμετρος	εμβαδόν
ΑΒΓΔ	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$		
ΕΖΗΘ	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$		
ΚΛΜΝ	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$		

5 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{2}\,(\sqrt{18} + \sqrt{8})$ β) $\sqrt{6}\,(\sqrt{27} - \sqrt{3})$

γ) $(\sqrt{75} + \sqrt{45} - \sqrt{300}) : \sqrt{15}$ δ) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$

6 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ γ) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$ δ) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

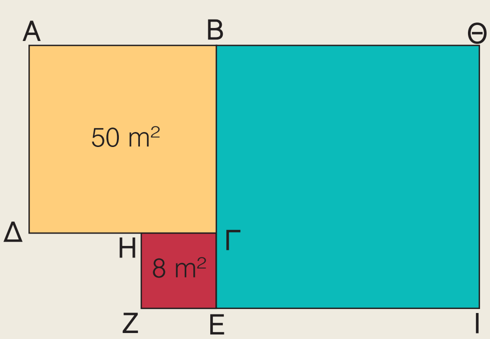
7 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{5} + x = 3\sqrt{5} - x$ β) $\sqrt{6}\,x = \sqrt{24}$

γ) $\frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{32}$ δ) $3\sqrt{3} - x = \sqrt{27}$

8 Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 2$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ισότητα να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$, που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

9 Αν τα τετράγωνα ΑΒΓΔ, ΓΕΖΗ έχουν εμβαδόν 50 m² και 8 m² αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΘΙΕ είναι 98 m².

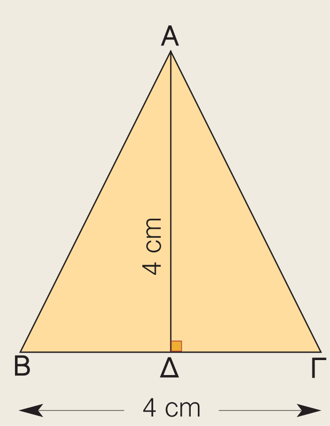


10 Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 6 cm ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ, Ε, έτσι ώστε ΑΔ = 2 cm και ΑΕ = 1 cm. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 3ΔΕ.

11 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), το ύψος ΑΔ = 4 cm και η πλευρά ΒΓ = 4 cm.

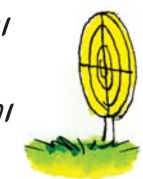
α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΓ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $4 + 4\sqrt{5}$ cm.

β) Στην προηγούμενη ερώτηση 4 μαθητές έδωσαν τις παρακάτω απαντήσεις:
$4 + \sqrt{20}$, $4 + 2\sqrt{20}$, $8\sqrt{5}$, $2(2 + \sqrt{20})$.
Ποιες από αυτές είναι σωστές;



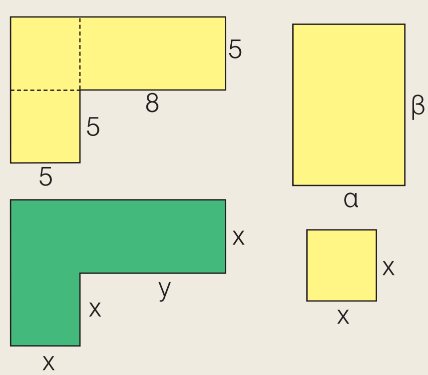
1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

- ✔ *Μαθαίνω τι είναι αλγεβρική παράσταση και πώς βρίσκεται η αριθμητική τιμή της.*
- ✔ *Διακρίνω αν μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο και προσδιορίζω το βαθμό του.*
- ✔ *Μαθαίνω να κάνω πράξεις με μονώνυμα.*



Α Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



1. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν των κίτρινων σχημάτων.

2. Στο πράσινο σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός καταστήματος που πρόκειται να στρωθεί με πλακάκια. Να εξηγήσετε γιατί τα πλακάκια που θα χρειαστούν έχουν συνολικό εμβαδόν $2x^2 + xy$. Αν $x = 5$ και $y = 8$, ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν τους;

Αλγεβρικές παραστάσεις

Πολλές φορές για να λύσουμε ένα πρόβλημα, καταλήγουμε σε εκφράσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς και γι' αυτό ονομάζονται **αριθμητικές παραστάσεις**.

$6 \cdot 5 + 2 \cdot 8, \quad 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 8$

Υπάρχουν όμως και προβλήματα στα οποία καταλήγουμε σε εκφράσεις οι οποίες, εκτός από αριθμούς, περιέχουν και μεταβλητές. Οι εκφράσεις αυτές λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις**.

$4x, \quad 2\alpha + 2\beta, \quad x^2, \quad \alpha\beta, \quad \frac{2x}{y^3}, \quad 2x^2 + xy$

Ειδικότερα μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

$2x + 3x^2, \quad \frac{1}{2}\alpha + \beta^2, \quad \frac{4}{3}\pi R^3$

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

Για παράδειγμα, η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $2x^2 + xy$ για $x = 5$ και $y = 8$, είναι $2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 8 = 90$.

Μονώνυμα

Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα**.

$4x, \quad x^2, \quad \frac{2}{3}\alpha\beta, \quad \sqrt{2}x^4y^2\omega^3$

Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

Μονώνυμο

$2x^3y$

συντελεστής   *κύριο μέρος*

Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ ο **βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

Το μονώνυμο $2x^3y$ είναι:
3ου βαθμού ως προς x
1ου βαθμού ως προς y
4ου βαθμού ως προς x και y

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύρος μέρος λέγονται **όμοια**.
Για παράδειγμα τα μονώνυμα $\frac{2}{5}x^3y\omega^2$, $-5x^3y\omega^2$, $x^3y\omega^2$, είναι όμοια.
Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**.
Για παράδειγμα τα μονώνυμα $2x^3y$ και $-2x^3y$ είναι αντίθετα.

Συμφωνούμε ακόμη να θεωρούνται και οι αριθμοί ως μονώνυμα και τα ονομάζουμε **σταθερά** μονώνυμα. Ειδικότερα, ο αριθμός 0 λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού. Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 είναι σταθερό μονώνυμο μηδενικού βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να βρεθεί η αριθμητική τιμή των παραστάσεων
α) $-3x^2y^3$, για $x = -2$ και $y = -1$ β) $2\alpha^2 - 3\beta + 6$ για $\alpha = -3$ και $\beta = 8$.

Λύση

α) Η αριθμητική τιμή της παράστασης $-3x^2y^3$ για $x = -2$ και $y = -1$ είναι:
$-3 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)^3 = -3 \cdot (+4) \cdot (-1) = 12$.

β) Η αριθμητική τιμή της παράστασης $2\alpha^2 - 3\beta + 6$ για $\alpha = -3$ και $\beta = 8$ είναι:
$2 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot 8 + 6 = 2 \cdot (+9) - 24 + 6 = 18 - 24 + 6 = 0$.

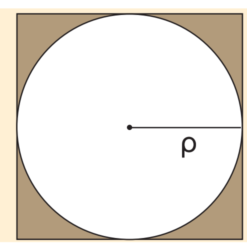
2 Το ιδανικό βάρος Β (σε κιλά) ενός ενήλικα, ύψους υ (σε cm) δίνεται από τον τύπο $B = \kappa\left(\upsilon - 100 + \frac{t}{10}\right)$, όπου t είναι η ηλικία του (σε έτη) και κ μια σταθερά (για τον άνδρα κ = 0,9 και για τη γυναίκα κ = 0,8). Να βρεθεί ποιο είναι το ιδανικό βάρος για έναν άνδρα και μια γυναίκα, από τους οποίους ο καθένας είναι 30 ετών και έχει ύψος 1,77 m.

Λύση

Το ιδανικό βάρος Β (σε κιλά) ενός άνδρα ηλικίας 30 ετών και ύψους 1,77 m = 177 cm, είναι $B = 0{,}9 \cdot \left(177 - 100 + \frac{30}{10}\right) = 0{,}9 \cdot (177 - 100 + 3) = 0{,}9 \cdot 80 = 72$ κιλά.

Το ιδανικό βάρος Β (σε κιλά) μιας γυναίκας ηλικίας 30 ετών και ύψους 1,77 m = 177 cm, είναι $B = 0{,}8 \cdot \left(177 - 100 + \frac{30}{10}\right) = 0{,}8 \cdot (177 - 100 + 3) = 0{,}8 \cdot 80 = 64$ κιλά.

3 Να βρεθεί το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του χρωματισμένου μέρους, το οποίο περιέχεται μεταξύ του τετραγώνου και του κύκλου. Να προσδιοριστεί ο συντελεστής του, το κύριο μέρος του και ο βαθμός του.
Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή του για ρ = 10 cm.



Λύση

Το τετράγωνο έχει πλευρά 2ρ, οπότε το εμβαδόν του είναι $(2\rho)^2 = 4\rho^2$. Επειδή το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, το χρωματισμένο μέρος έχει εμβαδόν $4\rho^2 - \pi\rho^2$. Με την επιμεριστική ιδιότητα η παράσταση $4\rho^2 - \pi\rho^2$ γράφεται

$$4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2 = (4 - 3{,}14)\rho^2 = 0{,}86\rho^2$$

Άρα είναι μονώνυμο δευτέρου βαθμού με συντελεστή 0,86 και κύριο μέρος ρ^2.
Η αριθμητική τιμή του για ρ = 10 cm είναι $0{,}86 \cdot 10^2 = 0{,}86 \cdot 100 = 86$ cm².

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;

α) $-3x^2y$ β) $3 + x^2y$ γ) $\frac{x^3y}{\omega^2}$ δ) $2x^2y\omega^3$ ε) $(3 - \sqrt{2})\alpha\beta^3$ στ) $\frac{2}{3}\alpha\beta\gamma^3$

2 Ποια από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια:

α) $6x^2y^2$ β) $-\frac{3}{5}xy^3$ γ) $-x^3y\omega$ δ) $-5y^3x$ ε) $\frac{\omega y x^3}{4}$ στ) $\frac{5}{2}y^2x^2$

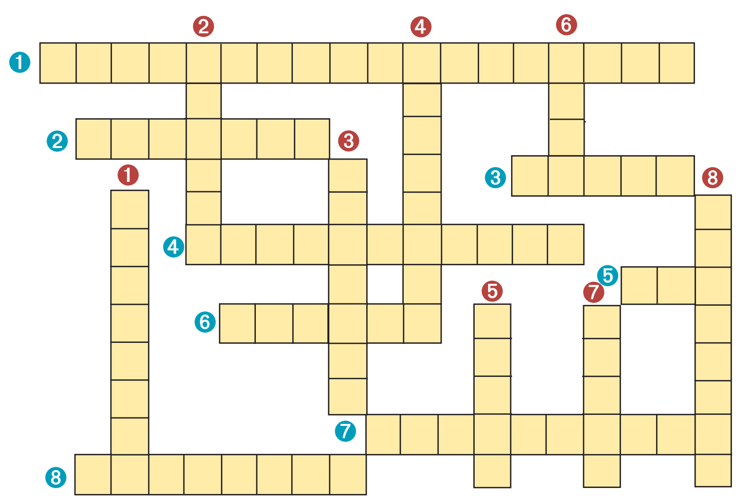
ζ) $\frac{xy^3}{7}$ η) $-x^2y^2$ θ) $yx^3\omega$ ι) $\sqrt{2}xy^3$

3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	Βαθμός ως προς x και y
$5xy^4$					
$-xy^2$					
$\frac{1}{7}x^2y^5$					
$-\sqrt{3}x^4$					

4 Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{1}{3}$ και κύριο μέρος $xy^2\omega^3$. Να βρείτε το ίσο του και το αντίθετο μονώνυμό του.

5 Να λύσετε το σταυρόλεξο.



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

1. Έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές συνδεόμενες με τα σύμβολα των πράξεων (δύο λέξεις).
2. Είναι τα μονώνυμα 8, –5, 0, 3.
3. Είναι ο βαθμός του μονωνύμου $3x^2\omega$ ως προς y.
4. Στο μονώνυμο $-2x^2y$ είναι το –2.
5. Είναι τα μονώνυμα $-\frac{6}{2}x^3y$, $-3x^3y$.
6. Ο συντελεστής του μονωνύμου xy.
7. Είναι το $x y\omega^2$ στο μονώνυμο $4xy\omega^2$ (δύο λέξεις).
8. Η απλούστερη αλγεβρική παράσταση.

ΚΑΘΕΤΑ

1. Το μονώνυμο αυτό δεν έχει βαθμό.
2. Στο μονώνυμο $7x^4y\omega^5$ ως προς x είναι 4.
3. Παράσταση που μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
4. Είναι τα μονώνυμα $5xy^2$, $-\sqrt{25}xy^2$.
5. Είναι τα μονώνυμα $4\alpha^2\beta^5$, $-\alpha^2\beta^5$.
6. Η .... του μονωνύμου $-2x^2y$ για $x = 2$ και $y = -1$ είναι 8.
7. Είναι ο βαθμός των σταθερών μονωνύμων 6, –3, 7.
8. Η πράξη αυτή δε σημειώνεται μεταξύ των μεταβλητών ενός μονωνύμου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

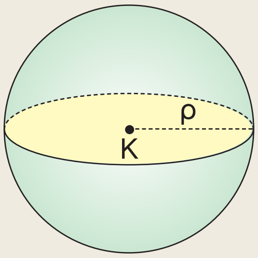
1 Να βρείτε την αριθμητική τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:
α) $-2xy^3 + x^2y - 4$ για $x = -2$ και $y = 1$
β) $\frac{2}{3}x\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^3$ για $x = 3$ και $\omega = -2$

2 Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{5}{7}$ και μεταβλητές α, β. Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς α είναι 2 και ως προς α και β είναι 5.

3 Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού ν, ώστε το μονώνυμο $3x^{\nu}y^2$
α) να είναι μηδενικού βαθμού ως προς x
β) να είναι πέμπτου βαθμού ως προς x και y
γ) να έχει αριθμητική τιμή 48, για $x = 2$ και $y = -1$.

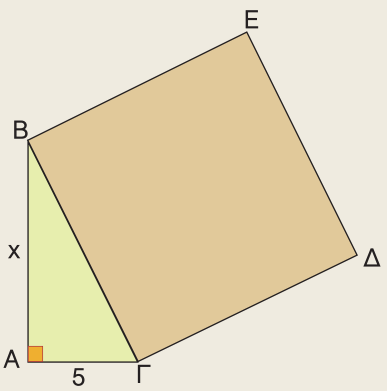
4 Να βρείτε τους αριθμούς κ. λ, ν, ώστε τα μονώνυμα $4x^3y^{\nu}$, $\lambda x^{\kappa}y^2$ να είναι:
α) όμοια **β)** ίσα **γ)** αντίθετα

5 Να γράψετε τα μονώνυμα που εκφράζουν το εμβαδόν και τον όγκο μιας σφαίρας που έχει ακτίνα ρ. Να προσδιορίσετε το συντελεστή, το κύριο μέρος και το βαθμό κάθε μονωνύμου. Ποια είναι η αριθμητική τιμή κάθε μονωνύμου, όταν $\rho = 10$;



6 Μια ομάδα καλαθοσφαίρισης έδωσε 9 αγώνες.
Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που εκφράζει τους βαθμούς που συγκέντρωσε, αν σε κάθε νίκη παίρνει 2 βαθμούς και σε κάθε ήττα 1 βαθμό.

7 Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ. Ποιο είναι το εμβαδόν, όταν $x = 12$;



Β Πράξεις με μονώνυμα

Οι μεταβλητές ενός μονωνύμου αντιπροσωπεύουν αριθμούς και γι' αυτό στις πράξεις που γίνονται μεταξύ μονωνύμων ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων που ισχύουν και στους αριθμούς.

Πρόσθεση μονωνύμων

Ένα άθροισμα ομοίων μονωνύμων π.χ. $-5x^3 + 2x^3$ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται

$$-5x^3 + 2x^3 = (-5 + 2)x^3 = -3x^3$$

Παρατηρούμε ότι:

Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

Σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα, έχουμε $-12x^2y - 3x^2y = -15x^2y$.
Αν τα μονώνυμα δεν είναι όμοια, όπως τα $3x$ και $5y$, τότε το άθροισμά τους $3x + 5y$ δεν είναι μονώνυμο.

Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Ένα γινόμενο μονωνύμων π.χ. $(-2x)(3x^2y)$ με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού και των δυνάμεων γράφεται

$$(-2x)(3x^2y) = (-2)x \cdot 3x^2y = (-2) \cdot 3(xx^2)y = -6x^3y.$$

Παρατηρούμε ότι:

Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο με:
- **συντελεστή** το γινόμενο των συντελεστών τους και
- **κύριο μέρος** το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

Σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα έχουμε $(-3x^4y^3\omega)\left(\frac{2}{5}x\omega^3\right) = -\frac{6}{5}x^5y^3\omega^4$.

Διαίρεση μονωνύμων

Η διαίρεση μονωνύμων, όπως και η διαίρεση αριθμών γίνεται, αν πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.
Για παράδειγμα,

$$(-12x^4y\omega^2) : (4x^2y\omega) = -12x^4y\omega^2 \cdot \frac{1}{4x^2y\omega} = \frac{-12x^4y\omega^2}{4x^2y\omega} = -\frac{12}{4} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{\omega^2}{\omega} = -3x^2\omega.$$

Ομοίως έχουμε: $(7xy^4) : (-x^3y) = \dfrac{7xy^4}{-x^3y} = -\dfrac{7y^3}{x^2}$

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο παράδειγμα το πηλίκο των μονωνύμων είναι μονώνυμο, ενώ στο δεύτερο παράδειγμα δεν είναι μονώνυμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-7\alpha x^2 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + 4\alpha x^2$ β) $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right)$ γ) $\left(\frac{3}{4}\alpha^3\beta\right):\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^3\right)$

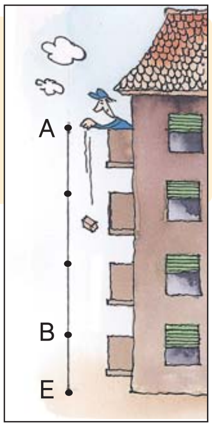
Λύση

α) $-7\alpha x^2 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + 4\alpha x^2 = \left(-7-\frac{1}{2}+4\right)\alpha x^2 = \left(-\frac{14}{2}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}\right)\alpha x^2 = -\frac{7}{2}\alpha x^2$

β) $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right) = \frac{2}{12}x^4y^4 = \frac{1}{6}x^4y^4$

γ) $\left(\frac{3}{4}\alpha^3\beta\right):\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^3\right) = \frac{3\alpha^3\beta}{4}:\left(-\frac{\alpha\beta^3}{2}\right) = \frac{3\alpha^3\beta}{4}\cdot\left(-\frac{2}{\alpha\beta^3}\right) = -\frac{6\alpha^3\beta}{4\alpha\beta^3} = -\frac{3\alpha^2}{2\beta^2}$

2 Από το σημείο Α αφήνουμε ένα σώμα να πέσει στο έδαφος. Αν ο χρόνος t σε sec που μεσολαβεί μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι διπλάσιος του χρόνου που θα έκανε, αν το αφήναμε να πέσει από το σημείο Β, να βρεθεί το μονώνυμο που εκφράζει την απόσταση ΑΒ.



Λύση

Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι η απόσταση ΑΕ δίνεται από τον τύπο $AE = \frac{1}{2}gt^2$, όπου $g = 10$ m/sec^2 περίπου. Άρα $AE = 5t^2$.

Αν αφήναμε το σώμα να πέσει από το σημείο Β, τότε θα έφτανε στο έδαφος σε χρόνο $\frac{t}{2}$ sec και θα ήταν

$$BE = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{t^2}{4} = \frac{5}{4}t^2.$$

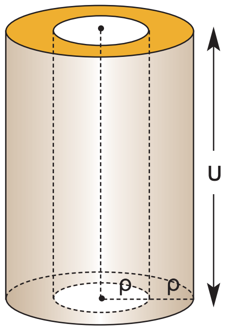
Η απόσταση ΑΒ είναι $AB = AE - BE = 5t^2 - \frac{5}{4}t^2 = \frac{20}{4}t^2 - \frac{5}{4}t^2 = \frac{15}{4}t^2$.

3 Μια τσιμεντένια κυλινδρική κολώνα, που έχει ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ, ενισχύεται περιμετρικά με τσιμέντο και αποκτά ακτίνα βάσης διπλάσια της αρχικής. Ο μηχανικός ισχυρίζεται ότι το τσιμέντο που προστέθηκε έχει όγκο τριπλάσιο του αρχικού όγκου της κολώνας. Είναι σωστός ο ισχυρισμός του;

Λύση

Ο αρχικός όγκος της κολώνας ήταν $V_1 = \pi\rho^2\upsilon$.

Μετά την ενίσχυση της κολώνας, ο συνολικός όγκος της έγινε $V_2 = \pi(2\rho)^2\upsilon = \pi(4\rho^2)\upsilon = 4\pi\rho^2\upsilon$. Άρα το τσιμέντο που προστέθηκε έχει όγκο $V_2 - V_1 = 4\pi\rho^2\upsilon - \pi\rho^2\upsilon = 3\pi\rho^2\upsilon$, που είναι πράγματι τριπλάσιος του αρχικού όγκου $\pi\rho^2\upsilon$ της κολώνας. Επομένως ο ισχυρισμός του μηχανικού είναι σωστός.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο. ☐

β) Η διαφορά δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο. ☐

γ) Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο. ☐

δ) Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι μονώνυμο. ☐

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $-5x^2 + 2x^2 = \dots\dots\dots$ β) $-5x^2 \cdot 2x^3 = \dots\dots\dots$ γ) $3x - 2y + 2x = \dots\dots\dots$

δ) $4x^2y - yx^2 = \dots\dots\dots$ ε) $2xy \cdot y^2 = \dots\dots\dots$ στ) $6x^3y : 3xy = \dots\dots\dots$

ζ) $5x^4\omega^3 \, (\dots\dots) = -10x^6\omega^4$ η) $\dfrac{-12x^3y}{\dots\dots\dots} = \dfrac{4x^2}{y}$ θ) $3x^2y - \dots\dots = -4x^2y$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-7x^2y + 4x^2y$ β) $4\alpha x^2 - 6\alpha x^2 + \alpha x^2$ γ) $6x^3 - \dfrac{9}{2}x^3$

δ) $0{,}25\alpha\beta - 0{,}35\alpha\beta + 0{,}5\alpha\beta$ ε) $\dfrac{2}{5}xy^2\omega^4 - 1{,}2xy^2\omega^4$ στ) $-3\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^2$

2 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $-3x \cdot 5x^2$ β) $6x^2 \cdot \dfrac{3}{4}x^3$ γ) $2xy^3 \cdot (-3x^2y)$ δ) $-3x^2y \cdot (-2xy^4\omega)$

ε) $-\dfrac{1}{3}\alpha\beta^3 \cdot 4\alpha\beta^3$ στ) $\dfrac{4}{3}x^3\alpha^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}x\alpha^3\right)$ ζ) $\left(-\dfrac{2}{5}xy^3\right) \cdot (-3x^2\omega) \cdot \left(-\dfrac{5}{6}y\omega^3\right)$

3 Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

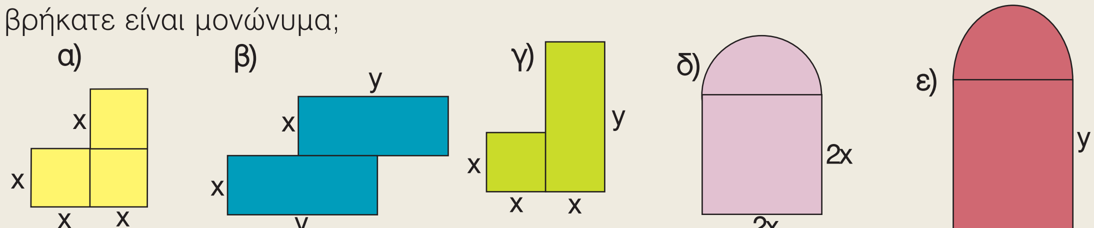
α) $12\alpha^3 : (-3\alpha)$ β) $8x^2y : (2xy^2)$ γ) $\left(-\dfrac{1}{3}\alpha^3\beta^5\right) : \left(\dfrac{6}{5}\alpha^2\beta^2\right)$

δ) $(0{,}84x^2\omega^5) : (-0{,}12x\omega^3)$ ε) $(-x^3\alpha^4\omega) : \left(-\dfrac{1}{4}x^2\alpha\right)$ στ) $(0{,}5\alpha^3\beta^7) : \left(-\dfrac{7}{10}\alpha^2\beta^2\right)$

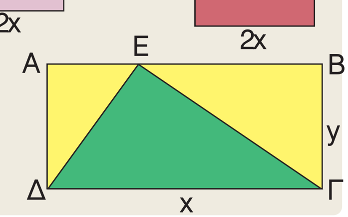
4 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\left(-\dfrac{1}{3}x^2y\right)^2 \cdot (6xy^3)$ β) $(-2x^2y^3)^3 : (-8x^3y^4)$ γ) $(-2xy^4\omega^3)^2 \cdot (-x^2y)^3$

5 Να βρείτε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων. Ποιες από τις εκφράσεις που βρήκατε είναι μονώνυμα;



6 Να συγκρίνετε το εμβαδόν του πράσινου τριγώνου με το άθροισμα των εμβαδών των κίτρινων τριγώνων.



1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

✔ *Μαθαίνω τι είναι πολυώνυμο, ποιος είναι ο βαθμός ενός πολυωνύμου και διακρίνω αν δύο πολυώνυμα είναι ίσα.*

✔ *Μαθαίνω να προσθέτω και να αφαιρώ πολυώνυμα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να γράψετε τρία όμοια μονώνυμα με δύο μεταβλητές και να βρείτε το άθροισμά τους.
2. Να γράψετε τρία μονώνυμα με δύο μεταβλητές που δεν είναι όμοια. Μπορείτε τώρα να βρείτε ένα μονώνυμο ίσο με το άθροισμά τους;
3. Να βρείτε το βαθμό κάθε μονωνύμου της προηγούμενης ερώτησης, ως προς κάθε μεταβλητή και ως προς τις δύο μεταβλητές.

Πολυώνυμα

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε, ότι το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά. Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο αλλά μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**. π.χ. $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος** του πολυωνύμου.

Το πολυώνυμο $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$ έχει τρεις όρους που είναι τα μονώνυμα $3x^2y$, $2xy^4$, $-5x^3y^3$.

Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται
- διώνυμο, αν έχει δύο όρους $3\alpha^2 - 2\beta$
- τριώνυμο, αν έχει τρεις όρους. $2x^2 - 3x + 4$

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Το πολυώνυμο $3x^2y + 2xy^4 - 5x^3y^3$ είναι
3ου βαθμού ως προς x,
4ου βαθμού ως προς y,
6ου βαθμού ως προς x και y.

Συμφωνούμε, ακόμα, ότι κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται **σταθερό** πολυώνυμο. Ειδικότερα, ο αριθμός μηδέν λέγεται **μηδενικό** πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

Το πολυώνυμο $-3x + 2x^2 + 5$ έχει μία μεταβλητή την x και για συντομία συμβολίζεται $P(x)$ ή $Q(x)$ ή $A(x)$ κ.τ.λ.

Το πολυώνυμο $P(x) = -3x + 2x^2 + 5$ είναι δευτέρου βαθμού και μπορούμε να το γράψουμε έτσι, ώστε κάθε όρος του να είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον επόμενό του.

Δηλαδή, $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$.

Τότε, λέμε, ότι γράφουμε το πολυώνυμο **κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x**.

Η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου $P(x)$ για $x = 5$, συμβολίζεται με $P(5)$ και είναι:

$$P(5) = 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 5 = 50 - 15 + 5 = 40.$$

Δύο πολυώνυμα είναι **ίσα**, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.

Τα πολυώνυμα $3x^2 - 5x + 1$ και $αx^2 + βx + 1$ είναι ίσα, αν $α = 3$ και $β = -5$.

Αναγωγή ομοίων όρων

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, ή όπως λέμε όμοιοι όροι, τότε μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή ομοίων όρων**.

$$2α^2 - 3β + 4α^2 - 5β =$$
$$\underbrace{2α^2 + 4α^2}\ \underbrace{- 3β - 5β} = 6α^2 - 8β$$

Η αρχική αλγεβρική παράσταση, που είχε τέσσερις όρους, συμπτύχθηκε σε μία άλλη με δύο όρους.

Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Για παράδειγμα, τα πολυώνυμα $A(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 5$ και $B(x) = 2x^3 - x^2 + x$ έχουν άθροισμα ή διαφορά που βρίσκουμε ως εξής:

$A(x) + B(x) = (3x^3 - 2x^2 - 7x - 5) + (2x^3 - x^2 + x) =$ (Απαλείφουμε τις παρενθέσεις)

$= 3x^3 - 2x^2 - 7x - 5 + 2x^3 - x^2 + x =$ (Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων)

$= 5x^3 - 3x^2 - 6x - 5.$

Ομοίως, έχουμε:

$A(x) - B(x) = (3x^3 - 2x^2 - 7x - 5) - (2x^3 - x^2 + x) =$

$= 3x^3 - 2x^2 - 7x - 5 - 2x^3 + x^2 - x =$

$= x^3 - x^2 - 8x - 5.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να γραφεί το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 8x + αx^3 - 5$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρεθεί ο βαθμός του.

β) Αν το $P(x)$ είναι ίσο με το πολυώνυμο $Q(x) = βx^2 + γx + δ$, ποιες είναι οι τιμές των α, β, γ, δ;

Λύση

α) Το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 8x + \alpha x^3 - 5$, κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x γράφεται $P(x) = \alpha x^3 + 4x^2 - 8x - 5$. Το P(x) είναι τρίτου βαθμού, αν $\alpha \neq 0$ και δευτέρου βαθμού, αν $\alpha = 0$.

β) Τα πολυώνυμα $P(x) = \alpha x^3 + 4x^2 - 8x - 5$ και $Q(x) = \beta x^2 + \gamma x + \delta$ είναι ίσα, αν $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $\gamma = -8$ και $\delta = -5$.

2 Μια βιοτεχνία ρούχων για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει ημερησίως 500 € για μισθούς υπαλλήλων, 10 € για τα υλικά που απαιτεί κάθε πουκάμισο (ύφασμα, κλωστές, ...) και $\frac{1}{10}x^2$ € για τα υπόλοιπα έξοδά της (μεταφορικά, ηλεκτρικό ρεύμα ...). Πόσα ξοδεύει ημερησίως για την κατασκευή x πουκαμίσων; Ποια θα είναι τα έξοδα της βιοτεχνίας, αν κατασκευάσει 50 πουκάμισα;

Λύση

Τα έξοδα των υλικών για την κατασκευή ενός πουκάμισου είναι 10 €, οπότε για τα x πουκάμισα τα έξοδα των υλικών θα είναι 10x €. Το συνολικό ποσό σε €, που ξοδεύει ημερησίως η βιοτεχνία είναι $P(x) = \frac{1}{10}x^2 + 10x + 500$

Για την κατασκευή 50 πουκάμισων τα έξοδα είναι:
$P(50) = \frac{1}{10}50^2 + 10 \cdot 50 + 500 = \frac{1}{10}2500 + 500 + 500 = 1250$ €

3 Αν $P(x) = x^2 - 3x + 4$, να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x) - P(-x)$.

Λύση

Το πολυώνυμο P(2x) προκύπτει, αν στο P(x) θέσουμε, όπου x το 2x, οπότε έχουμε:
$P(2x) = (2x)^2 - 3(2x) + 4 = 4x^2 - 6x + 4$
Το πολυώνυμο P(–x) προκύπτει, αν στο P(x) θέσουμε, όπου x το –x, οπότε έχουμε:
$P(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 4 = x^2 + 3x + 4$. Άρα:

$$Q(x) = P(2x) - P(-x) = (4x^2 - 6x + 4) - (x^2 + 3x + 4) =$$
$$= 4x^2 - 6x + 4 - x^2 - 3x - 4 = 3x^2 - 9x$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα;

α) $4x^3 - 5x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ β) $3x^4 - 7x^2 - 12$

γ) $\sqrt{2}\,x^2y - 5xy + y^2 + \frac{1}{3}$ δ) $x^3 + 2x^2y - \sqrt{x}\,y^2 + 3y^3$

2 Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι 2ου βαθμού ως προς x;

α) $7 - 3x - 2x^2$ β) $3x^2 - 5x - 3x^2 + 10$

γ) $4x^3 + x^2 - 3x^3 + 2x - x^3 + 6$ δ) $2xy - 3y + 9$

3 Ένας μαθητής θέλοντας να υπολογίσει το άθροισμα και τη διαφορά των πολυωνύμων $4x^3 - 8x^2 + x + 7$ και $x^3 - 6x + 2$ έγραψε

Άθροισμα

$$\begin{array}{rrrrr} & 4x^3 & -8x^2 & +x & +7 \\ + & x^3 & & -6x & +2 \\ \hline & 5x^3 & -8x^2 & -5x & +9 \end{array}$$

Διαφορά

$$\begin{array}{rrrrr} & 4x^3 & -8x^2 & +x & +7 \\ + & -x^3 & & +6x & -2 \\ \hline & 3x^3 & -8x^2 & +7x & +5 \end{array}$$

Είναι σωστός ο τρόπος που εφάρμοσε; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Το πολυώνυμο που πρέπει να προσθέσουμε στο $2x^2 + 5x + 7$ για να βρούμε άθροισμα $8x^2 + 4x - 5$ είναι το:

α) $6x^2 + x - 2$ **β)** $10x^2 + 9x + 2$ **γ)** $6x^2 - x - 12$ **δ)** $-6x^2 + x + 12$.

5 Τα πολυώνυμα Α(x), Β(x) και Γ(x) έχουν βαθμούς 2, 3 και 2 αντιστοίχως.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυώνυμου Α(x) + Β(x).

β) Αν το πολυώνυμο Α(x) + Γ(x) δεν είναι το μηδενικό, τι βαθμό μπορεί να έχει;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

α) $P(x) = 3x - 5x^2 + x^4 + 10 + 2x^3$ **β)** $Q(x) = -6x + 2x^3 + 1$

γ) $A(x) = -3x^2 + 7 + 2x^3 + 7x$ **δ)** $B(x) = x - x^4 - 5$

2 Δίνεται το πολυώνυμο $Α = -2xy^2 + y^3 + 2x^3 - xy^2$.

α) Να βρείτε την αριθμητική του τιμή για $x = 2$ και $y = -1$.

β) Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y. Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς x και y;

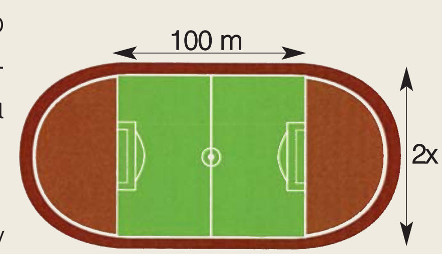
3 Αν $P(x) = 2x^2 + 2x - 9$, να αποδείξετε ότι:

α) $P(-3) = P(2)$ **β)** $3P(1) + P(3) = 0$

4 Η επιφάνεια ενός σταδίου αποτελείται από δύο ημικυκλικούς δίσκους και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που έχει μήκος 100 μέτρα και πλάτος 2x μέτρα.

α) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του, αν το πλάτος του είναι ίσο με 60 μέτρα.



5 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2x^2 - x) - (x^3 - 5x^2 + x - 1)$

β) $-3x^2y - (2xy - yx^2) + (3xy - y^3)$

γ) $(2α^2 - 3αβ) - (β^2 + 4αβ) - (α^2 + β^2)$

δ) $2ω^2 - \left[4ω - 3 - (ω^2 + 5ω)\right]$

ε) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 1\right) - \left(\frac{1}{6}x + x^2 - \frac{1}{3}\right)$

στ) $(0{,}4x^3 + 2{,}3x^2) + (3{,}6x^3 - 0{,}3x^2 + 4)$

6 Αν $A(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4$, $B(x) = -3x^3 + 5x - 2$ και $Γ(x) = 4x^2 - 3x + 8$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $A(x) - B(x)$ β) $A(x) + Γ(x)$ γ) $Γ(x) - \left[A(x) + B(x)\right]$

7 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α) $(\cdots\ .....\ - 4x \cdots\ .....) + (x^2 \cdots\ .....\ + 4) = -6x^2 - 8x + 7$

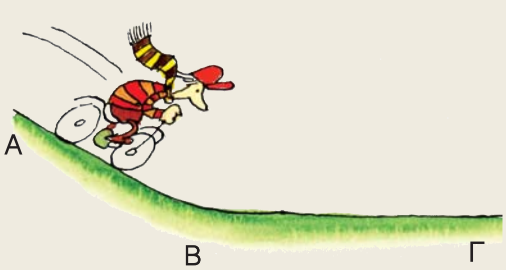
β) $(-x^3 \cdots\ .....\ + 8) - (\cdots\ .....\ + x^2 \cdots\ .....) = x^3 - x^2 + 5x + 9$

8 Να συμπληρώσετε το παρακάτω τετράγωνο ώστε να είναι μαγικό. (Τα τρία πολυώνυμα οριζοντίως, καθέτως και διαγωνίως έχουν το ίδιο άθροισμα).

$2x^2+2x-3$	$7x^2+3x-4$	
$9x^2-3x+2$		
$4x^2+4x-5$		

9 Αν $P(x) = (-5x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + x)$ και $Q(x) = αx^2 + βx + γ$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

10 Ένας ποδηλάτης ξεκινάει από το σημείο Α και σε χρόνο t sec κατεβαίνει το δρόμο ΑΒ με επιτάχυνση $α = 2\ m/sec^2$. Όταν φτάσει στο σημείο Β, συνεχίζει να κινείται στο δρόμο ΒΓ για 10 sec με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε την παράσταση που εκφράζει την απόσταση που διήνυσε ο ποδηλάτης. Ποια απόσταση διήνυσε ο ποδηλάτης, αν t = 5 sec;



1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Μαθαίνω να πολλαπλασιάζω:
- ✔ *Μονώνυμο με πολυώνυμο*
- ✔ *Πολυώνυμο με πολυώνυμο*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να γράψετε το γινόμενο $α(β + γ)$ σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα και με ανάλογο τρόπο να βρείτε την παράσταση $3x^2(2x^3 + 6x)$.

2. Να γράψετε το γινόμενο $(α + β)(γ + δ)$ σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα και με ανάλογο τρόπο να βρείτε την παράσταση $(3x^2y + 2y)(2x^2 + 5)$.

Πολλαπλασιασμός μονωνύμου με πολυώνυμο

Την αλγεβρική παράσταση $3x^2(2x^3 + 6x)$ που είναι γινόμενο του μονωνύμου $3x^2$ με το πολυώνυμο $2x^3 + 6x$, σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, μπορούμε να τη γράψουμε

$$3x^2(2x^3 + 6x) = 3x^2 \cdot 2x^3 + 3x^2 \cdot 6x = 6x^5 + 18x^3$$

Διαπιστώνουμε ότι:

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο

Την αλγεβρική παράσταση $(3x^2y + 2y)(2x^2 + 5)$ που είναι γινόμενο του πολυωνύμου $3x^2y + 2y$ με το πολυώνυμο $2x^2 + 5$, σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, μπορούμε να τη γράψουμε

$$\begin{aligned}(3x^2y + 2y)(2x^2 + 5) &= 3x^2y \cdot 2x^2 + 3x^2y \cdot 5 + 2y \cdot 2x^2 + 2y \cdot 5 = \\ &= 6x^4y + \underbrace{15x^2y + 4x^2y} + 10y = 6x^4y + 19x^2y + 10y\end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι:

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό μονωνύμου με πολυώνυμο ή δύο πολυωνύμων, λέμε ότι αναπτύσσουμε τα γινόμενα αυτά και το αποτέλεσμα ονομάζεται **ανάπτυγμα του γινομένου.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-\frac{2}{3}x^2y\left(x-\frac{1}{3}y-3\right)$ β) $(2x^2-5x+6)(x-2)$

γ) $4x(-2x^2+3x-1)-3x^2(-2x+5)$ δ) $-2x^2(x+4)(x-1)$

Λύση

α) $-\frac{2}{3}x^2y\left(x-\frac{1}{3}y-3\right)=-\frac{2}{3}x^3y+\frac{2}{9}x^2y^2+2x^2y$

β) $(2x^2-5x+6)(x-2)=2x^3-4x^2-5x^2+10x+6x-12=2x^3-9x^2+16x-12$

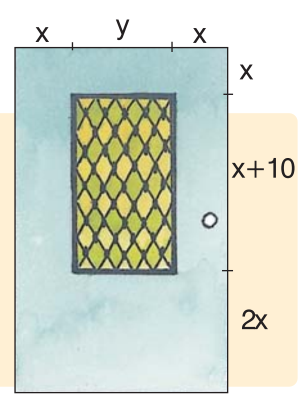
γ) $4x(-2x^2+3x-1)-3x^2(-2x+5)=-8x^3+12x^2-4x+6x^3-15x^2=-2x^3-3x^2-4x$

δ) $-2x^2(x+4)(x-1)=-2x^2(x^2-x+4x-4)=-2x^2(x^2+3x-4)=-2x^4-6x^3+8x^2$

➤ *Ο πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων μπορεί να γίνει όπως και ο πολλαπλασιασμός των αριθμών. Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός του (β) ερωτήματος $(2x^2-5x+6)(x-2)$ γίνεται και ως εξής:*

$$\begin{array}{lr}
 & 2x^2-5x+6 \\
 & x-2 \\ \hline
-2\cdot(2x^2-5x+6)\rightarrow & -4x^2+10x-12 \\
x\cdot(2x^2-5x+6)\rightarrow & +\ 2x^3-5x^2+6x \\ \hline
 & 2x^3-9x^2+16x-12
\end{array}$$

2 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πρόσοψη μιας πόρτας, που είναι κατασκευασμένη από αλουμίνιο. Αν ένα μέρος της πόρτας είναι διακοσμητικό τζάμι, να προσδιοριστεί το πολυώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του αλουμινίου, το οποίο απαιτείται για την κατασκευή της πρόσοψης της πόρτας.



Λύση

Η πόρτα έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις $2x+y$ και $4x+10$, οπότε έχει εμβαδόν $(2x+y)(4x+10)$.

Το διακοσμητικό τζάμι έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις y και $x+10$, οπότε έχει εμβαδόν $y(x+10)$.

Επομένως, το εμβαδόν του αλουμινίου που απαιτείται για την κατασκευή της πρόσοψης της πόρτας είναι:

$$(2x+y)(4x+10)-y(x+10)=8x^2+20x+4xy+10y-xy-10y=$$
$$=8x^2+20x+3xy$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x(x+1)$	1. $x^2 - x$
β. $(x+1)(x-1)$	2. $x^2 + 1$
γ. $x(x-1)$	3. $x^2 + 2x + 1$
δ. $(x+1)(1+x)$	4. $x^2 + 2x + 3$
ε. $(x+1)(x+2)$	5. $x^2 + x$
	6. $x^2 + 3x + 2$
	7. $x^2 - 1$

α	β	γ	δ	ε

2 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό 3 και το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 2, τότε το πολυώνυμο P(x) · Q(x) έχει βαθμό 6. ☐

β) Αν το πολυώνυμο P(x) · Q(x) έχει βαθμό 7 και το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό 3, τότε το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 4. ☐

3 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) $x(2x + ...) = ... + 4x$ β) $3x^2(..... - 2) = 3x^3y - .....$

γ) $(x+5)(..... + 3) = 2x^2 + ... + 10x + ...$ δ) $(x^2 + y)(x - .....) = ... - x^2y^2 + ... - y^3$

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

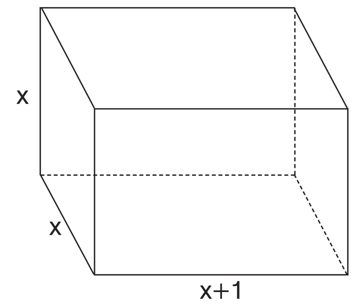
i) Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

α) $3x + 1$ β) $x^3 + 1$ γ) $x^3 + x^2$ δ) $x^3 + x$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

α) $6x^2 + 4x + 1$ β) $4x^2 + 6x$

γ) $6x^2 + 4x + 2$ δ) $6x^2 + 4x$

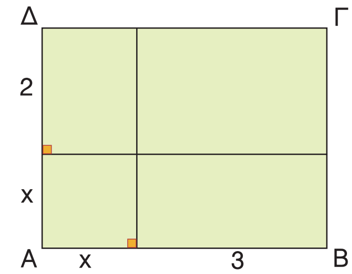


5 Ο καθηγητής των Μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές του να γράψουν την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και οι μαθητές του έδωσαν τις εξής απαντήσεις:

α) $(x + 2)(x + 3)$ β) $2x \cdot 3x$

γ) $x^2 + 6$ δ) $x^2 + 5x + 6$

Ποιές απ' αυτές είναι σωστές;



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-3x^2y(-5x + 2y)$ β) $4x(2x^2 - x + 2) - 8x$

γ) $-5x(2x - 3) - 3x(2 - 3x)$ δ) $2xy(x^2 - 3y^2) - 4x(x^2y - 2y^3)$

2 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2α - 3β)(-4α + 2β)$ β) $(x^2 - 2x + 4)(x + 2) - 8$

γ) $3x^2(-2x + 3)(5 - x)$ δ) $(4 - 3x)(5 - 2x) - 6x(x - 4)$

ε) $(2x^2 - 3x - 4)(-3x^2 + x)$ στ) $(3x^2 - 2xy - 5y^2)(4y - x)$

3 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(3x - 2)(x^2 - x)(4x - 3)$ β) $-2x(x^2 - x + 1)(x - 2) - (x - 1)(2x - 3)(x + 2)$

γ) $(-2x + y)(x^2 - 3xy) - (3x - y)(4x + y)(-2x - 3y)$

4 Να αποδείξετε τις ισότητες:

α) $(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x + 4) - x^2(x^2 - 8) - 16 = 0$

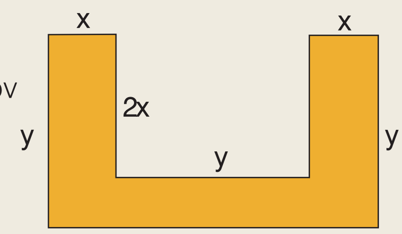
β) $(3α + 8β)(β - α) - (α + 2β)(β - 3α) = 6β^2$

5 Αν $P(x) = -2x^2 + 5x - 3$ και $Q(x) = 4x - 5$, να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $P(x) \cdot Q(x)$ β) $P(x) \cdot [-3Q(x) + 11x - 12]$ γ) $[P(x) - 2] \cdot [Q(x) + 3]$

6 Αν $P(x) = 3x(-2x + 4)(x - 1)$ και $Q(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

7 Να βρείτε την πλευρά τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



8 Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με πλάτος x μέτρα και με μήκος μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 5 μέτρα. Αν το μήκος ελαττωθεί κατά 3 μέτρα και το πλάτος ελαττωθεί κατά 1 μέτρο, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου θα μειωθεί κατά $4x + 2$ τετραγωνικά μέτρα.

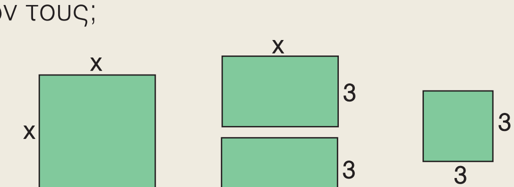
1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

- ✔ *Θυμάμαι ποια ισότητα λέγεται ταυτότητα.*
- ✔ *Γνωρίζω ποιες είναι οι βασικές ταυτότητες.*
- ✔ *Μαθαίνω να αποδεικνύω μια απλή ταυτότητα.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Ποιες από τις ισότητες $3x = 12$, $x + y = 7$, $4α = 3α + α$, $x(x + 2) = x^2 + 2x$, αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους;

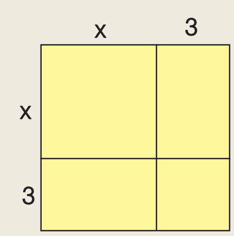
2. α) Να βρείτε το συνολικό εμβαδόν των πράσινων σχημάτων.



β) Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις εκφράζει το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου;

i) $x^2 + 9$ ii) $(x + 3)^2$

iii) $x^2 + 6x$ iv) $6x + 9$



γ) Να συγκρίνετε το συνολικό εμβαδόν των πράσινων σχημάτων με το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου.

Υπάρχουν ισότητες που περιέχουν μεταβλητές και αληθεύουν για ορισμένες τιμές των μεταβλητών τους. Για παράδειγμα, η ισότητα $3x = 12$, αληθεύει για $x = 4$ και δεν αληθεύει για καμιά άλλη τιμή του x. Ομοίως, η ισότητα $x + y = 7$, αληθεύει για $x = 1$ και $y = 6$, ή για $x = 3$ και $y = 4$, ενώ δεν αληθεύει για $x = 4$ και $y = 5$.

Υπάρχουν όμως και ισότητες, που αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους όπως για παράδειγμα οι ισότητες: $α + β = β + α$, $4α = 3α + α$, $x(x + 2) = x^2 + 2x$. Οι ισότητες αυτές λέγονται **ταυτότητες**.

Γενικά

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Ταυτότητες υπάρχουν πολλές, ορισμένες από αυτές τις συναντάμε πολύ συχνά και γι' αυτό αξίζει να τις θυμόμαστε. **Αξιοσημείωτες ταυτότητες** είναι:

α) Τετράγωνο αθροίσματος

Αν την παράσταση $(\alpha + \beta)^2$ τη γράψουμε $(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$ και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα $\boxed{(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$

Το δεύτερο μέρος της προηγούμενης ισότητας λέγεται **ανάπτυγμα** του $(\alpha + \beta)^2$.

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y + 4)^2$ προκύπτει, αν στην προηγούμενη ταυτότητα αντικαταστήσουμε το α με το y και το β με το 4, οπότε έχουμε:

$$(y + 4)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = y^2 + 8y + 16.$$

Η προηγούμενη ταυτότητα, όπως και όλες οι επόμενες, χρησιμοποιούνται και όταν τα α, β είναι οποιεσδήποτε αλγεβρικές παραστάσεις, π.χ.

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Η ταυτότητα
$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
για θετικούς αριθμούς α και β μπορεί να ερμηνευθεί και γεωμετρικά. Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $\alpha + \beta$, οπότε το εμβαδόν του είναι:

$$E = (\alpha + \beta)^2 \qquad (1)$$

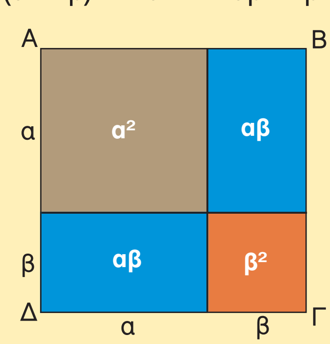
Το εμβαδόν όμως του τετραγώνου ΑΒΓΔ προκύπτει ακόμη κι αν προσθέσουμε τα εμβαδά των σχημάτων που το αποτελούν. Δηλαδή

$E = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2$ ή

$E = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \qquad (2)$

Από τις ισότητες *(1)* και *(2)* διαπιστώνουμε ότι

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.



β) Τετράγωνο διαφοράς

Αν την παράσταση $(\alpha - \beta)^2$ τη γράψουμε $(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$ και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, τότε μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$\boxed{(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}$$

Πράγματι έχουμε:

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y - 4)^2$ προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε το α με το y και το β με το 4, οπότε έχουμε:

$$(y - 4)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = y^2 - 8y + 16$$

Ομοίως, για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα του $(3x - 4y)^2$ έχουμε:

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (4y) + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

γ) Κύβος αθροίσματος – διαφοράς

Αν την παράσταση $(\alpha+\beta)^3$ τη γράψουμε $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2$ και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό του $\alpha+\beta$ με το ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2 =\\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) =\\ &= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 =\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα $\boxed{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$\boxed{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$$

Σύμφωνα με τις προηγούμενες ταυτότητες έχουμε:

- $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$
- $(2x-5)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 5+3\cdot(2x)\cdot 5^2-5^3=8x^3-60x^2+150x-125.$

δ) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

Αν βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ έχουμε:

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\cancel{\alpha\beta}+\cancel{\beta\alpha}-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα $\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}$

Η προηγούμενη ταυτότητα χρησιμοποιείται για να βρίσκουμε γρήγορα το γινόμενο αθροίσματος δύο παραστάσεων επί τη διαφορά τους. Για παράδειγμα, έχουμε:

- $(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$
- $(3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta)=(3\alpha)^2-(2\beta)^2=9\alpha^2-4\beta^2$

ε) Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων

Η παράσταση $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ γράφεται:

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\cancel{\alpha^2\beta}+\cancel{\alpha\beta^2}-\cancel{\beta\alpha^2}-\cancel{\alpha\beta^2}-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$

Αποδείξαμε λοιπόν την ταυτότητα $\boxed{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3}$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και την ταυτότητα

$$\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3}$$

Οι προηγούμενες ταυτότητες χρησιμοποιούνται για να βρίσκουμε γρήγορα γινόμενα παραστάσεων που έχουν τις αντίστοιχες μορφές. Για παράδειγμα έχουμε:

- $(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)(x^2+2x+2^2)=x^3-2^3=x^3-8$
- $(x+3)(x^2-3x+9)=(x+3)(x^2-3x+3^2)=x^3+3^3=x^3+27$

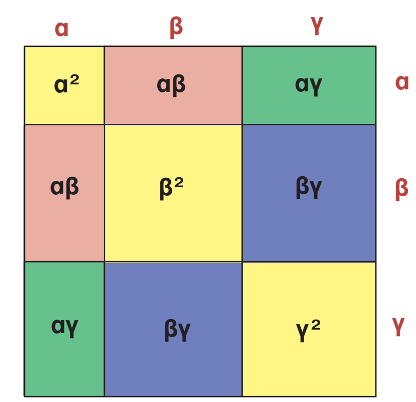
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 α) Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(α + β + γ)^2 = α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ + 2βγ + 2γα$.
β) Να βρεθεί το ανάπτυγμα του $(3x + 2y + 4)^2$.

Λύση

α) $(α + β + γ)^2 = (α + β + γ)(α + β + γ) =$
$= α^2 + αβ + αγ + βα + β^2 + βγ + γα + γβ + γ^2 =$
$= α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ + 2βγ + 2γα$.

β) Σύμφωνα με την προηγούμενη ταυτότητα, το ανάπτυγμα του $(3x + 2y + 4)^2$ είναι:
$(3x + 2y + 4)^2 =$
$= (3x)^2 + (2y)^2 + 4^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + 2 \cdot 2y \cdot 4 + 2 \cdot 3x \cdot 4 =$
$= 9x^2 + 4y^2 + 16 + 12xy + 16y + 24x$.



$(α+β+γ)^2 = α^2+β^2+γ^2+2αβ+2βγ+2γα$

2 α) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες
$α^2 + β^2 = (α + β)^2 - 2αβ$ και $α^3 + β^3 = (α + β)^3 - 3αβ(α + β)$.
β) Αν $x + \frac{2}{x} = 3$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων $x^2 + \frac{4}{x^2}$ και $x^3 + \frac{8}{x^3}$.

Λύση

α) Κάνουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος κάθε ταυτότητας και έχουμε:
$(α + β)^2 - 2αβ = α^2 + 2αβ + β^2 - 2αβ = α^2 + β^2$
$(α + β)^3 - 3αβ(α + β) = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3 - 3α^2β - 3αβ^2 = α^3 + β^3$.

β) Η παράσταση $x^2 + \frac{4}{x^2}$ γράφεται $x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2$ και σύμφωνα με την ταυτότητα

$α^2 + β^2 = (α + β)^2 - 2αβ$ έχουμε:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{2}{x} = 3^2 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5.$$

Η παράσταση $x^3 + \frac{8}{x^3}$ γράφεται $x^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^3$ και σύμφωνα με την ταυτότητα

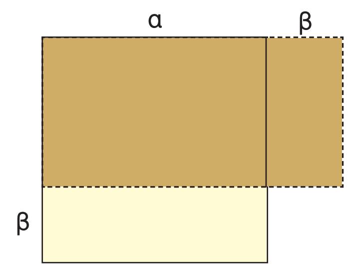
$α^3 + β^3 = (α + β)^3 - 3αβ(α + β)$ έχουμε:

$$x^3 + \frac{8}{x^3} = x^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{2}{x} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 27 - 18 = 9$$

3 Σε ένα οικόπεδο που έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς α, αν μειωθεί η μία διάστασή του κατά β και ταυτόχρονα η άλλη διάστασή του αυξηθεί κατά β, πόσο θα μεταβληθεί το εμβαδόν του;

Λύση

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $α^2$. Αν αλλάξουν οι πλευρές του, τότε το οικόπεδο θα γίνει ορθογώνιο με διαστάσεις $α - β$ και $α + β$, οπότε θα έχει εμβαδόν $(α - β)(α + β) = α^2 - β^2$. Δηλαδή, το εμβαδόν από το $α^2$ θα γίνει $α^2 - β^2$, που σημαίνει ότι θα μειωθεί κατά $β^2$.



4 Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ που έχει άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

Λύση

Για να μετατραπεί ο παρονομαστής σε ρητό αριθμό πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $3 + \sqrt{5}$, γιατί $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$. Επομένως

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

5 α) Να αποδειχθεί η ταυτότητα $(ν - 1)(ν + 1) + 1 = ν^2$.

β) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2007 \cdot 2009 + 1$ είναι τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού, τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

α) $(ν - 1)(ν + 1) + 1 = (ν^2 - 1^2) + 1 = ν^2 - 1 + 1 = ν^2$.

β) Αν $ν = 2008$, τότε $ν - 1 = 2007$ και $ν + 1 = 2009$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη ταυτότητα έχουμε:

$2007 \cdot 2009 + 1 = (ν - 1)(ν + 1) + 1 = ν^2 = 2008^2$.

Άρα, ο αριθμός $2007 \cdot 2009 + 1$ είναι το τετράγωνο του ακεραίου 2008.

➤ *Ορισμένοι αριθμητικοί υπολογισμοί γίνονται πιο σύντομα με τη βοήθεια των ταυτοτήτων π.χ.*

$99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$

$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10609$

6 Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(2x - 3)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1)$ β) $(x - 2y)^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Λύση

α)
$$\begin{aligned}(2x - 3)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1) &= \left[(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2\right] - 2\left[(3x)^2 - 1^2\right] = \\ &= (4x^2 - 12x + 9) - 2(9x^2 - 1) = \\ &= 4x^2 - 12x + 9 - 18x^2 + 2 = -14x^2 - 12x + 11\end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned}(x - 2y)^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= \left[x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3\right] - (x^3 - y^3) = \\ &= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 - x^3 + y^3 = \\ &= -6x^2y + 12xy^2 - 7y^3\end{aligned}$$

7 Να αποδειχθεί ότι $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$ (Ταυτότητα Lagrange).

Λύση

Το 1ο μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2$$

Το 2ο μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 &= (\alpha x)^2 + 2(\alpha x)(\beta y) + (\beta y)^2 + (\alpha y)^2 - 2(\alpha y)(\beta x) + (\beta x)^2 = \\ &= \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2 = \\ &= \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2\end{aligned}$$

Άρα $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα για να αποδείξουμε μία ταυτότητα Α = Β, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

- *Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε στο άλλο (παραδείγματα 1, 2, 5) ή*
- – *Κάνουμε τις πράξεις στο 1ο μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε σε μία ισότητα Α = Γ.*
  – *Κάνουμε τις πράξεις στο 2ο μέλος της ταυτότητας και καταλήγουμε σε μια ισότητα Β = Γ.*

  Αφού Α = Γ και Β = Γ συμπεραίνουμε ότι Α = Β (παράδειγμα 7).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;

α) $0x = 0$ **β)** $x + y = 0$ **γ)** $\alpha^2\alpha = \alpha^3$ **δ)** $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ **ε)** $\alpha\beta = 0$

2 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το ανάπτυγμα του $(x + \alpha)^2$ είναι:

α) $x^2 + \alpha^2$ **β)** $x^2 - 2x\alpha + \alpha^2$ **γ)** $x^2 + x\alpha + \alpha^2$ **δ)** $x^2 + 2x\alpha + \alpha^2$ ☐

ii) Το ανάπτυγμα του $(2\alpha + 1)^2$ είναι:

α) $2\alpha^2 + 4\alpha + 1$ **β)** $4\alpha^2 + 1$ **γ)** $4\alpha^2 + 4\alpha + 1$ **δ)** $4\alpha^2 + 2\alpha + 1$ ☐

iii) Το ανάπτυγμα του $(y - 2)^2$ είναι:

α) $y^2 - 2y + 4$ **β)** $y^2 - 4$ **γ)** $y^2 - 4y + 4$ **δ)** $y^2 + 4y + 4$ ☐

3 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $(x - y)^2 = x^2 - 2x(-y) + (-y)^2$ ☐

β) $(-\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ ☐

γ) $(5\omega + 4)^2 = 25\omega^2 + 16$ ☐

δ) $(3x - y)^2 = 3x^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2$ ☐

4 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το ανάπτυγμα του $(x+1)^3$ είναι:

α) $x^3 + 3\cdot x\cdot 1 + 1^3$ β) $x^3 + 1^3$

γ) $x^3 + 3\cdot x^2\cdot 1 + 3\cdot x\cdot 1^2 + 1^3$ δ) $x^3 + x^2\cdot 1 + x\cdot 1^2 + 1^3$ ☐

ii) Το ανάπτυγμα του $(\beta-2)^3$ είναι:

α) $\beta^3 - 3\cdot\beta\cdot 2 + 2^3$ β) $\beta^3 - 2^3$

γ) $\beta^3 - \beta^2\cdot 2 + \beta\cdot 2^2 - 2^3$ δ) $\beta^3 - 3\cdot\beta^2\cdot 2 + 3\cdot\beta\cdot 2^2 - 2^3$ ☐

5 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$ ☐

β) $(2x+3)^3 = 2x^3 + 3\cdot 2x^2\cdot 3 + 3\cdot 2x\cdot 3^2 + 3^3$ ☐

γ) $(3x-1)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2\cdot 1 + 3(3x)\cdot 1^2 + 1^3$ ☐

δ) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ ☐

6 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το ανάπτυγμα του $(y-3)(y+3)$ είναι:

α) $y^2 - 3$ β) $9 - y^2$ γ) $y^2 - 9$ δ) $3 - y^2$ ☐

ii) Το ανάπτυγμα του $(y+x)(x-y)$ είναι:

α) $y^2 - x^2$ β) $x^2 - y^2$ γ) $(x-y)^2$ δ) $x^2 + y^2$ ☐

iii) Το ανάπτυγμα του $(\omega-2\alpha)(\omega+2\alpha)$ είναι:

α) $\omega^2 - 2\alpha^2$ β) $\omega^2 + 4\alpha^2$ γ) $4\alpha^2 - \omega^2$ δ) $\omega^2 - 4\alpha^2$ ☐

iv) Το ανάπτυγμα του $(5-x)(5^2+5x+x^2)$ είναι:

α) $5^3 + x^3$ β) $x^3 - 5^3$ γ) $5^3 - x^3$ δ) $25 - x^3$ ☐

v) Το ανάπτυγμα του $(x+2\alpha)(x^2-2\alpha x+4\alpha^2)$ είναι:

α) $x^3 + 2\alpha^3$ β) $x^3 - (2\alpha)^3$ γ) $x^3 - 2\alpha^3$ δ) $x^3 + 8\alpha^3$ ☐

7 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το ανάπτυγμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $(x+y)(y-x)$	1. $x^2 - 2xy + y^2$
β. $(x+y)^2$	2. $x^3 - y^3$
γ. $(y-x)^2$	3. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
δ. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$	4. $y^2 - x^2$
ε. $(x+y)(x^2-xy+y^2)$	5. $x^2 + 2xy + y^2$
στ. $(x-y)^3$	6. $x^2 - y^2$
	7. $x^3 + y^3$
	8. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

α	β	γ	δ	ε	στ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 2)^2$ β) $(y + 5)^2$ γ) $(2\omega + 1)^2$ δ) $(\kappa + 2\lambda)^2$
ε) $(3y + 2\beta)^2$ στ) $(x^2 + 1)^2$ ζ) $(y^2 + y)^2$ η) $(2x^2 + 3x)^2$
θ) $(x + \sqrt{2})^2$ ι) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ ια) $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega + \frac{4}{\omega}\right)^2$

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 3)^2$ β) $(y - 5)^2$ γ) $(3\omega - 1)^2$ δ) $(2\kappa - \lambda)^2$
ε) $(3y - 2\beta)^2$ στ) $(x^2 - 2)^2$ ζ) $(y^2 - y)^2$ η) $(2x^2 - 5x)^2$
θ) $(x - \sqrt{3})^2$ ι) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ ια) $\left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega - \frac{2}{\omega}\right)^2$

3 Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(\sqrt{3} + 1)^2$ β) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2$ γ) $(\sqrt{2} - 3)^2$ δ) $(1 - \sqrt{7})^2$

4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(x \cdots .....)^2 = ... + ... + 9$ β) $(..... \cdots 4)^2 = y^2 - ..... \cdots .....$
γ) $(..... - .....)^2 = 16x^2 \cdots 8x\alpha \cdots .....$ δ) $(..... \cdots 2\omega)^2 = ... - 4x^2\omega \cdots .....$

5 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 1)^3$ β) $(y + 4)^3$ γ) $(2\alpha + 1)^3$ δ) $(3\alpha + 2\beta)^3$
ε) $(x^2 + 3)^3$ στ) $(y^2 + y)^3$ ζ) $(x - 2)^3$ η) $(y - 5)^3$
θ) $(3\alpha - 1)^3$ ι) $(2x - 3y)^3$ ια) $(y^2 - 2)^3$ ιβ) $(\omega^2 - 2\omega)^3$

6 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 1)(x + 1)$ β) $(y - 2)(y + 2)$ γ) $(3 - \omega)(3 + \omega)$
δ) $(x + 4)(4 - x)$ ε) $(x - y)(-x - y)$ στ) $(-x + y)(-x - y)$
ζ) $(2x + 7y)(2x - 7y)$ η) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ θ) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

7 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x - 3)^2 + (3x + 1)^2 - 10(x - 1)(x + 1)$ είναι σταθερό.

8 α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4) = \alpha^8 - \beta^8$.
β) Να υπολογίσετε το γινόμενο: $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001$.

9 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\dfrac{1}{\sqrt{5} - 1}$ β) $\dfrac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ γ) $\dfrac{5}{3 + \sqrt{2}}$ δ) $\dfrac{12}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$

10 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)(x^2+3x+9)$ β) $(y+2)(y^2-2y+4)$

γ) $(2ω+1)(4ω^2-2ω+1)$ δ) $(1-α)(1+α+α^2)$

11 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x-4)^2+(2x+5)^2$ β) $(x^2-1)^2-(x^2-3)(x^2+3)$

γ) $(x+y)^2-(x-2y)(x+2y)+(2x-y)^2$ δ) $(3x-4)^2+(3x+4)^2-2(3x-4)(3x+4)$

ε) $(2α+1)^3+(2α-1)^3$ στ) $(α+2)^3-(α+2)(α^2-2α+4)$

ζ) $(α^2+α)^3-(α^2-α)^3$ η) $(4α-1)^3-α(8α+1)(8α-1)$

12 Να αποδείξετε ότι:

α) $(x-2y)^2-(2x-y)^2+3x^2=3y^2$

β) $(α-3β)^2+(3α+2β)(3α-2β)-(3α-β)^2=α^2+4β^2$

γ) $(x-1)(x+1)^3-2x(x-1)(x+1)=x^4-1$

δ) $(α^2+β^2)^2-(2αβ)^2=(α^2-β^2)^2$

ε) $(α-4)^2+(2α-3)^2=α^2+(2α-5)^2$

στ) $(2x^2+2x)^2+(2x+1)^2=(2x^2+2x+1)^2$

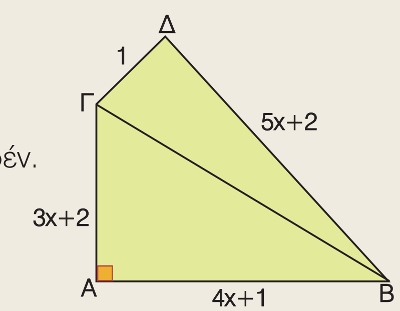
13 Αν $x=3+\sqrt{5}$ και $y=3-\sqrt{5}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) xy β) x^2-y^2 γ) x^2+y^2 δ) x^3+y^3

14 α) Να αποδείξετε ότι $\left(α+\dfrac{5}{α}\right)^2-\left(α-\dfrac{5}{α}\right)^2=20$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $x=\left(2005+\dfrac{1}{401}\right)^2-\left(2005-\dfrac{1}{401}\right)^2$

15 Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να αποδείξετε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



16
- Σκεφτείτε δύο αριθμούς διαφορετικούς από το μηδέν.
- Βρείτε το τετράγωνο του αθροίσματός τους.
- Βρείτε το τετράγωνο της διαφοράς τους.
- Αφαιρέστε από το τετράγωνο του αθροίσματος το τετράγωνο της διαφοράς.
- Διαιρέστε το τελικό αποτέλεσμα με το γινόμενο των δύο αριθμών που αρχικά σκεφτήκατε.
- Το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι ο αριθμός 4 ανεξάρτητα από τους αριθμούς που επιλέξατε. Μπορείτε να το εξηγήσετε;

17 α) Να αποδείξετε ότι $βγ=\dfrac{β^2+γ^2-(β-γ)^2}{2}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, που έχει υποτείνουσα 10 cm, και οι κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 2 cm.